图像处理中几何纠正的自适应方法*

朱 重 光
（中国科学院遥感应用研究所）

1985年12月12日收到

一、几何纠正的方法和误差估计

几何纠正的一般方程式为

$$\left.\begin{aligned} X &= F_1(x,y) \\ Y &= F_2(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中的 x、y 为像元在原始图像上的坐标，X、Y 为像元在纠正后的图像(目的图像)上的坐标. 得到函数 $F_1(x,y)$ 和 $F_2(x,y)$ 的方法有两种：一种是由已知原始图像和目的图像的方程与参数，用解析法求出；一种是选择原始图像和目的图像同名点对，采用多项式逼近法求得. 前一种方法，在一般情况下，难以给出原始图像的方程和参数，既使可给出，纠正处理的精度也不高；后一种方法，则不需给出原始或目的图像的方程和参数，只需通过同名点的对应，即可利用多项式逼近求得，较之前一种方法精度高，且具有简便和通用的特点. 本文采用后一种方法，即：

$$\left.\begin{aligned} X &= F_1(x,y) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} a_{jk}x^j y^k \\ Y &= F_2(x,y) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} b_{jk}x^j y^k \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

a_{jk} 和 b_{jk} 为几何纠正系数，是在原始图像和目的图像上的同名点作为控制点的位置，应用最小二乘法求得的. 请注意，选点分布要均匀. n 次多项式的点不得少于$\left[\frac{1}{2}\times(3n+n^2)+1\right]$ 个，其中 $n=1,2,3,4,\cdots\cdots$.

在图形的矢量纠正处理中，如地图线划图的投影变换，采用(2)式的正向纠正法(由原始矢量图形求目的矢量图形)，再用内插方法填补空像元，以保持图形的连续.

在以行扫描的数据中，采用(2)式的反函数式(以目的影像的点为自变量，经计算后，到原始影像上摘取像元，按顺序填充在目的影像中). (2)式的反函数形式为：

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(X,Y) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} a'_{jk}X^j Y^k \\ y &= f_2(X,Y) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} b'_{jk}X^j Y^k \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

* 本文得到李丽同志的指导及计算机房同志们的帮助，谨致谢忱.

(3)式中的纠正系数 a'_{jk} 和 b'_{jk} 的解算方法同式(2).

在实际应用中,常采用三次多项式逼近,形式为:

$$\left.\begin{aligned} x = {} & a_{00} + a_{10}X + a_{01}Y + a_{20}X^2 \\ & + a_{11}XY + a_{02}Y^2 + a_{30}X^3 \\ & + a_{21}X^2Y + a_{12}XY^2 + a_{03}Y^3 \\ y = {} & b_{00} + b_{10}X + b_{01}Y + b_{20}X^2 \\ & + b_{11}XY + b_{02}Y^2 + b_{30}X^3 \\ & + b_{21}X^2Y + b_{12}XY^2 + b_{03}Y^3 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

将(4)式改写为列向 x、y 的三次多项式:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_0 + A_1X + A_2X^2 + A_3X^3 \\ y &= B_0 + B_1X + B_2X^2 + B_3X^3 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中:

$$A_0 = a_{00} + a_{01}Y + a_{02}Y^2 + a_{03}Y^3$$
$$A_1 = a_{10} + a_{11}Y + a_{12}Y^2$$
$$A_2 = a_{20} + a_{21}Y$$
$$A_3 = a_{30}$$
$$B_0 = b_{00} + b_{01}Y + b_{02}Y^2 + b_{03}Y^3$$
$$B_1 = b_{10} + b_{11}Y + b_{12}Y^2$$
$$B_2 = b_{20} + b_{21}Y$$
$$B_3 = b_{30}$$

同样可求出行向 x 和 y 的三次多项式 L_x和L_y

$$\left.\begin{aligned} L_x &= A'_0 + A'_1Y + A'_2Y^2 + A'_3Y^3 \\ L_y &= B'_0 + B'_1Y + B'_2Y^2 + B'_3Y^3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中:

$$A'_0 = a_{00} + a_{10}X + a_{20}X^2 + a_{30}X^3$$
$$A'_1 = a_{01} + a_{11}X + a_{21}X^2$$
$$A'_2 = a_{02} + a_{12}X$$
$$A'_3 = a_{03}$$
$$B'_0 = b_{00} + b_{10}X + b_{20}X^2 + b_{30}X^3$$
$$B'_1 = b_{01} + b_{11}X + b_{21}X^2$$
$$B'_3 = b_{02} + b_{12}X$$
$$B'_3 = b_{03}$$

现在讨论(5)、(6)二式列向和行向三次式的线性表达问题. 引入带余项的 Lagrange 插值公式:

$$f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \quad a \leqslant \xi \leqslant b$$

而余项为

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

若记

$$M_{n+1} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|$$

则

$$|R_n(x)| \leqslant M_{n+1} \frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!}$$

当 $n = 1$ 时，

$$R_1(x) = \frac{1}{2}\omega_2(x) f''(\xi)$$

$$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

设 $x_1 - x_0 = h$，$x = x_0 + \theta h$，$0 < \theta < 1$，则

$$\omega_2(x) = -\theta(1-\theta)h^2$$

当 $0 < \theta < 1$ 时，$\theta(1-\theta)$ 的最大值为 1/4，所以，使用线性插值的误差估计为

$$\varepsilon = |R_1(x)| \leqslant \frac{1}{8} h^2 |f''(\xi)|$$

由此得列向（X）最小子区间为

$$h_X = \sqrt{\frac{8|\varepsilon_X|}{|f''_X(\xi)|}} \tag{7}$$

列向（Y）最小子区间为

$$h_Y = \sqrt{\frac{8|\varepsilon_Y|}{|f''_Y(\eta)|}} \tag{8}$$

式中：

$$|f''_X(\xi)| = |2A_2 + 6A_3 x|$$

$$|f''_Y(\eta)| = |2B_2 + 6B_3 x|$$

显然，当 ε_X 和 ε_Y 给定及 $|f''_X(\xi)|$ 和 $|f''_Y(\eta)|$ 达到最大时，h_X 和 h_Y 具有最小值，并被唯一确定.

同样可求出行向（X）最小子区间为

$$L_{h_X} = \sqrt{\frac{8|\varepsilon'_X|}{|f''_X(\xi')|}} \tag{9}$$

行向（Y）最小子区间为

$$L_{h_Y} = \sqrt{\frac{8|\varepsilon'_Y|}{|f''_Y(\eta')|}} \tag{10}$$

式中：

$$|f''_X(\xi')| = |2A'_2 + 6A'_3 y|$$

$$|f''_Y(\eta')| = |2B'_2 + 6B'_3 y|$$

(7)—(10)式为列向和行向二维三次多项式的等子区间的线性表达式.

二、自适应纠正方法的导出

在对图像进行二次以上多项式逼近处理时，其误差变化的分布是不均匀的．等子区间的误差不相等，均小于给定误差．反之，若设置误差相等的各子区间 h 的长是不等的，那么，它们均大于最小子区间长度，从这点出发构成不等距子区间的自适应纠正方法．

由(7)式可得

$$\left.\begin{aligned} f''_X(\xi) &= 2A_2 + 6A_3x \\ h^2 &= \frac{8|\varepsilon_X|}{|2A_2 + 6A_3x|} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

令 $C_1 = 2A_2/8$，$C_2 = 6A_3/8$，可从(11)式得出 h、x 和 ε 之间的关系式

$$h = \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{C_1}{\varepsilon} + \frac{C_2}{\varepsilon}x\right|}} \quad \text{即 } \varepsilon \text{ 给定时，不同 } x \text{ 值对应的 } h \text{ 值} \tag{12}$$

$$\varepsilon = h^2(C_1 + C_2x) \quad \text{当 } x \text{ 一定时，} \varepsilon \text{ 和 } h \text{ 的平方成正比} \tag{13}$$

$$x = \frac{\varepsilon - \frac{2A_2h^2}{8}}{6A_3h^2/8} = \frac{4\varepsilon}{3A_3h^2} - \frac{A_2}{3A_3} \quad \varepsilon \text{ 与 } x \text{ 成正比} \tag{14}$$

下面用上式推算各长度，设 h 为列向子区间长度．

首先按最小子区间作起始子区间长，并由(12)式以 $x = h_1$ 求得第二子区间长为 h_2．以后就以前两个子区间的长度，按 h_2^2/h_1 求出下一个子区间长的预测值 h_i，并由(13)式引出变换式：

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i} = \frac{h^2}{h_i^2} \quad \text{即} \quad h_i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}} = h$$

式中 ε 为给定误差值，其 ε_i 值由下式求得，

$$\varepsilon_i = \frac{f(X_i) - f(X_i - 1)}{2} - f\left(X\frac{h_i - 1}{2}\right)$$

式中 $[f(X_i) - f(X_i - 1)]/2$ 和 $f\left(X\frac{h_i - 1}{2}\right)$ 分别为子区间内插中点值和由三次式计算的值．

用以上方法可求出列向 x 各子区间节点值，同样可求出列向 y 各子区间节点值．亦可求出行向 x 和 y 各子区间的节点．

需要注意的是，通过拐点 $[f(\xi) = 0]$ 时，即 ε 值的符号变化，h_2^2/h_1 则改变方向为 h_1^2/h_2．当前两个子区间 ε 值的符号同号，则仍按 h_2^2/h_1 处理预测值．现将以两种纠正误差较大的图像(墨卡托投影纠正为等面积圆锥投影)为例，按上述步骤计算的结果列成表1．给定精度是 0.1 像元．

按三次多项式逐点计算和用自适应算法所得到的两种纠正影像无明显差别，而计算

时间却节省了约 15%。

以小型机 Eclipse S140 对 512×512 图像进行的几何纠正为例作一简要说明.

将逐点三次(5)式改写为连乘形式:

$$x = A_0 + [A_1 + (A_2 + A_3X)X]X$$

$$y = B_0 + [B_1 + (B_2 + B_3X)X]X$$

已知 x 和 y 各进行浮点加法和乘法运算为 6 次, S140 机运算速度一般为 20 万次/

表 1

Table 1

X	h	$f(x)$	$f(X_h/2)$	$\frac{f(X_i)+f(X_{i-1})}{2}$	ε
1		—55.14			
27	26	—18.19	—36.67	—36.77	+0.1
53	26	19.58	0.59	0.69	+0.1
79	26	58.10	38.75	38.84	+0.09
108	29	101.86	80.63	80.73	+0.1
137	29	146.37	124.79	124.88	+0.09
171	34	119.37	172.77	172.87	+0.1
209	38	259.45	229.31	229.41	+0.1
254	45	331.47	269.17	296.26	+0.09
324	70	444.54	387.91	388.00	+0.09
395	71	559.23	502.78	502.69	−0.09
441	46	632.86	596.15	596.05	−0.1
477	36	689.81	661.42	661.34	−0.09

秒,逐点三次式计算时间为:

$$512\times512\times 2\times 6/200000=15 \text{秒}$$

自适应线性为:

$$x = A_0' + A_1'X$$

$$y = B_0' + B_1'X$$

计算时间为:

$$512\times512\times 2\times2/200000= 5 \text{秒}$$

若考虑 512×512 数据输入和输出的时间是 60 秒, 则自适应的纠正处理时间约节省 15%。

A Adaptive Method of Geometric Correction

Zhu Chongguang

(Institute of Remote Sensing Application, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, one of the adaptive algorithm of implementing geometric correction has been proposed. Its key points are.

In terms of the unsteadiness of error distribution of over two orders polynomial processing during image geometric correcting and the correction accuracy, the adaptive algorithm of unequal length interval of 2-dimension geometric correction will be derived from the rest term of Lagrange interpolation. It will save 15% calculating time than three orders polynomial point by point correction, but the quality and accuracy of images are almost same.